

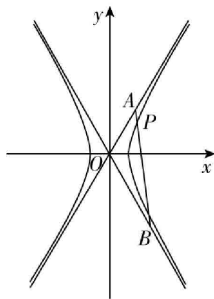
第五步:利用对勾函数的性质求出 $S_{\triangle AOB}$ 的取值范围

$$\text{令 } h(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda}, \lambda \in \left[\frac{1}{3}, 2\right],$$

由对勾函数的性质可得 $h(\lambda)$ 在 $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ 上单调递减, 在 $(1, 2]$ 上单调递增,

$\therefore h(\lambda) \in \left[2, \frac{10}{3}\right], \therefore S_{\triangle AOB} \in \left[\sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$. 故 $\triangle AOB$ 面积的取值范围为 $\left[\sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$ 17 分

► 利用对勾函数的性质求出 $S_{\triangle AOB}$ 的取值范围得 1 分



2025 年全国高考名校名师联席命制 数学信息卷(七)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
答案	C	B	B	D	B	C	B	D	BD	ABD	ACD	$-\sqrt{6}$	-1	$\sqrt{\frac{5}{6}}$

1. C 【热考点】集合的并集运算

【深度解析】由题可得, 集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 3\} = [-1, 3], B = \{y | y = \pi^x, x \in \mathbf{R}\} = \{y | y > 0\} = (0, +\infty)$ (易错: 集合 B 中 x 的取值范围为全体实数, 需与集合 A 中元素作区分), 所以 $A \cup B = [-1, +\infty)$. 故选 C.

2. B 【热考点】复数的除法运算、共轭复数的概念

【深度解析】 $z = \frac{-2-5i}{-1+i} = \frac{2+5i}{1-i} = \frac{(2+5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$, 所以 $\bar{z} = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2}i$, 故 \bar{z} 的虚部为 $-\frac{7}{2}$. 故选 B.

3. B 【热考点】利用余弦定理解三角形

【深度解析】在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A = b^2 + c^2 - bc = 49$, 联立 $\begin{cases} 5b = 8c, \\ b^2 + c^2 - bc = 49, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b = 8, \\ c = 5 \end{cases}$ (b, c 均大于 0), 所以 $a+b+c = 20$. 故选 B.

4. D 【热考点】双曲线的几何性质

【深度解析】依题意, 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 因为一条渐近线与直线 $4x+y+7=0$ 垂直, 直线 $4x+y+7=0$ 的斜率为 -4 (提示: 两直线斜率分别为 k_1, k_2 , 若两直线互相垂直, 则 $k_1 \cdot k_2 = -1$), 所以 $\frac{b}{a} = \frac{1}{4}$, 则双曲线 C 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{4}$. 故选 D.

► 关键点拨 求解双曲线的渐近线方程时, 可令标准方程右侧的值为 0, 直接解方程即可求出渐近线的方程.

5. B 【热题型】二项展开式中特定项的系数

【深度解析】因为 $(x+y-1)^8 = [(x-1)+y]^8$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_8^r (x-1)^{8-r} y^r$ ($r=0, 1, \dots, 8$), 当 $r=4$ 时才能出现 y^4 , 此时 $T_5 = C_8^4 (x-1)^4 y^4$, $(x-1)^4$ 展开式的通项为 $T_5 = C_4^k x^{4-k} (-1)^k$ ($k=0, 1, 2, 3, 4$), 当 $k=3$ 时出现 x , 所以展开式中含

xy^4 项的系数为 $C_8^4 C_4^3 (-1)^3 = -280$. 故选 B.

► 一题多解 $(x+y-1)^8$ 可以看成 8 个因式 $(x+y-1)$ 相乘, 其中 4 个因式出 y , 剩下的 4 个因式中有一个因式出 x , 其余因式出 -1 , 所以展开式中含 xy^4 项的系数为 $C_8^4 C_4^1 \cdot (-1)^3 = -280$. 故选 B.

6. C 【热考点】直线和圆的位置关系

【深度解析】圆 $C: x^2 + (y+2)^2 = 4$, 圆心为 $(0, -2)$, 半径 $r=2$, 设斜率为 -1 的直线 l 的方程为 $x+y+m=0$, 则圆心到直线 l 的距离 $d = \frac{|-2+m|}{\sqrt{2}}$, 由题意得 $0 < d < 2$, 则 $0 < |-2+m| < 2\sqrt{2}$. 弦长

$$|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{4 - \frac{(m-2)^2}{2}}, \triangle CAB \text{ 的面积为 } S_{\triangle CAB} = \frac{1}{2} \cdot$$

$$d \cdot |AB| = \frac{|-2+m|}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{4 - \frac{(m-2)^2}{2}} = \sqrt{2(m-2)^2 - \frac{(m-2)^4}{4}}, \text{ 令}$$

$(m-2)^2 = t, 0 < t < 8$, 则 $S_{\triangle CAB} = \sqrt{2t - \frac{t^2}{4}} = \sqrt{-\frac{1}{4}(t-4)^2 + 4}$, 当 $t = 4$, 即 $m=0$ 或 $m=4$ 时, $S_{\triangle CAB}$ 取得最大值 2, 所以当 $\triangle CAB$ 面积取得最大值时, 直线 l 的纵截距为 0 或 -4 (易错: 混淆直线的截距的定义). 故选 C.

► 一题多解 圆 $C: x^2 + (y+2)^2 = 4$, 圆心为 $(0, -2)$, 半径为 $r=2$, 设圆心 C 到直线 l 的距离为 d ($0 < d < 2$), $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{4 - d^2}$, 则 $S_{\triangle CAB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \sqrt{d^2(4 - d^2)} \leq \frac{d^2 + (4 - d^2)}{2} = 2$, 当且仅当 $d^2 = 4 - d^2$, 即 $d = \sqrt{2}$ 时等号成立.

设直线 l 的方程为 $x+y+m=0$, 此时圆心到直线的距离 $d = \frac{|-2+m|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 解得 $m=0$ 或 $m=4$, 所以直线 l 的纵截距为 0 或 -4 . 故选 C.

快解 圆 $C: x^2 + (y+2)^2 = 4$, 圆心为 $(0, -2)$, 半径为 $r = 2$, $S_{\triangle CAB} = \frac{1}{2} r \cdot r \cdot \sin \angle ACB = 2 \sin \angle ACB$, 当 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ 时, $S_{\triangle CAB}$ 取得最大值 2, 此时圆心到直线的距离 $d = \sqrt{2}$. 设直线 l 的方程为 $x + y + m = 0$, 则 $d = \frac{|-2+m|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 解得 $m = 0$ 或 $m = 4$, 所以直线 l 的纵截距为 0 或 -4. 故选 C.

7. B 【热风向】两角和与差的三角函数公式

【深度解析】 因为正实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 3$, 不妨设 $x = \sqrt{3} \cos \beta$, $y = \sqrt{3} \sin \beta$, 其中 $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $x \cos \alpha - y \sin \alpha = \sqrt{3} \cos \beta \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \beta \sin \alpha = \sqrt{3} \cos(\alpha + \beta) = -1$, 即 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. 因为 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\alpha + \beta \in (0, \pi)$, 所以 $\sin(\alpha + \beta) > 0$, 所以 $\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以 $x \sin \alpha + y \cos \alpha = \sqrt{3} \cos \beta \sin \alpha + \sqrt{3} \sin \beta \cos \alpha = \sqrt{3} \sin(\alpha + \beta) = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{2}$. 故选 B.

8. D 【热风向】利用导数研究方程的根

思路导引 $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数 $\rightarrow f(f(x)) = x$ 在 $(0, 2)$ 上有实数根 $\rightarrow f(x) = x$ 在 $(0, 2)$ 上有实数根
 分离参数 $\rightarrow a = \frac{-x^3 + 2x}{3} \rightarrow$ 设 $g(x) = \frac{-x^3 + 2x}{3}, x \in (0, 2) \rightarrow$ 求导
 $g(x)$ 的最大值 $\rightarrow a$ 的最大值

【深度解析】 因为 $f'(x) = x^2 + \frac{1}{3} > 0$, 所以 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, 且 $f(f(x)) = x$, 若 $f(x) > x$, 则 $f(f(x)) > f(x) > x$, 若 $f(x) < x$, 则 $f(f(x)) < f(x) < x$, 显然都不成立, 所以若方程 $f(f(x)) = x$ 在区间 $(0, 2)$ 上有实数根, 则 $f(x) = x$ 在区间 $(0, 2)$ 上有实数根, 即方程 $\frac{x^3 + x}{3} + a = x$ 在区间 $(0, 2)$ 上有实数根, 整理得 $a = \frac{-x^3 + 2x}{3}$. 设函数 $g(x) = \frac{-x^3 + 2x}{3}, x \in (0, 2)$, 则 $g'(x) = -x^2 + \frac{2}{3}$, 当 $0 < x < \frac{\sqrt{6}}{3}$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增; 当 $\frac{\sqrt{6}}{3} < x < 2$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减, 所以 $g(x)_{\max} = g(\frac{\sqrt{6}}{3}) = \frac{4\sqrt{6}}{27}$, 则 a 的最大值是 $\frac{4\sqrt{6}}{27}$. 故选 D.

关键点拨 此题解题的关键是利用 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, 将方程 $f(f(x)) = x$ 在区间 $(0, 2)$ 上有实数根, 转化为 $f(x) = x$ 在区间 $(0, 2)$ 上有实数根.

9. BD 【热素材】数据的极差、平均数、方差、中位数的计算

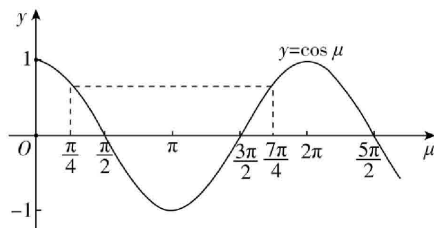
【深度解析】 将这组数据从小到大排序得 6, 6, 7, 8, 9, 9, 9, 10, 对于 A, 这组数据的极差为 $10 - 6 = 4$, 故 A 错误;
 对于 B, 平均数为 $\frac{6+6+7+8+9+9+9+10}{8} = 8$, 故 B 正确;
 对于 C, 中位数为 $\frac{8+9}{2} = 8.5$, 故 C 错误;
 对于 D, 方差为 $\frac{1}{8} \times [(6-8)^2 \times 2 + (7-8)^2 + (8-8)^2 + (9-8)^2 \times 3 + (10-8)^2] = 2$, 故 D 正确. 故选 BD.

10. ABD 【热题型】正弦型函数的图象和性质、函数图象的变换

【深度解析】 对于 A, 当 $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 时, $2x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \subseteq [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, 故 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减, 故 A 正确;

对于 B, 当 $x = \frac{\pi}{8}$ 时, $f(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} \sin(2 \times \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$, 故 B 正确;

对于 C, $g(x) = f(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos(2x + \frac{\pi}{4})$, 当 $x \in [0, t]$ 时, 令 $\mu = 2x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, 2t + \frac{\pi}{4}]$, 作出 $y = \cos \mu$ 的图象, 如图所示.

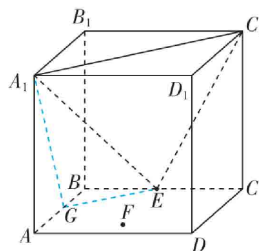


由图象可知, 若 $g(x)$ 在 $[0, t]$ 上的最大值为 $g(0)$, 则 $2t + \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4}$, 所以 $t \leq \frac{3\pi}{4}$, 故 t 的最大值为 $\frac{3\pi}{4}$, 故 C 错误;

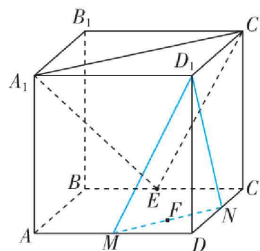
对于 D, 令 $g(x) = \sqrt{2} \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$, 则 $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, 可得 $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $g(x)$ 图象的对称中心为 $(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, 0), k \in \mathbf{Z}$, 故 D 正确. 故选 ABD.

11. ACD 【热题型】正方体中的截面周长、线面垂直的判定、动点轨迹、三棱锥的外接球

【深度解析】 A 选项, 如图①, 取 AB 的中点 G , 连接 GE, A_1G , 因为 E 为 BC 的中点, 所以 $A_1C_1 \parallel GE, A_1C_1 = 2GE$, 所以过点 A_1, E, C_1 的平面截正方体所得的截面为梯形 A_1C_1EG , 其周长为 $2\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{5} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$, 故 A 选项正确;



图①



图②

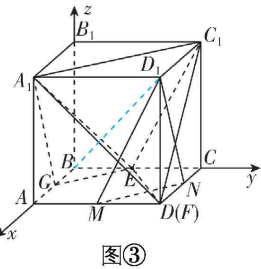
B 选项, 假设存在点 F , 使得 $DF \perp$ 平面 A_1EC_1 , 由 $DF \perp A_1C_1$, 得 F 只能在线段 BD 上, 再由 $DF \perp C_1E$, 得 F 只能在线段 CD 上, 即 F 与 D 重合, 不符合题意, 故 B 选项错误;

C 选项, 如图②, 取 AD 的中点 M, CD 的中点 N , 连接 MD_1, MN, ND_1 , 可得 $MD_1 \parallel C_1E, MN \parallel A_1C_1$, 又 $MD_1 \not\subset$ 平面 $A_1EC_1, MN \not\subset$ 平面 $A_1EC_1, C_1E \subset$ 平面 $A_1EC_1, A_1C_1 \subset$ 平面 A_1EC_1 , 所以 $MD_1 \parallel$ 平面 $A_1EC_1, MN \parallel$ 平面 A_1EC_1 , 又 $MD_1 \cap MN = M, MD_1, MN \subset$ 平面 D_1MN , 所以平面 $D_1MN \parallel$ 平面 A_1EC_1 , 所以动点 F 的轨迹为线段 MN , 其长度为 $\sqrt{2}$, 故 C 选项正确;

D 选项,由 A, C 选项可得,平面 $A_1GEC_1 \parallel$ 平面 D_1MN , 所以当 F 在点 D 时, F 到平面 A_1EC_1 的距离最大, 此时 $\triangle FA_1C_1$ 为等边三角形, 连接 BD_1 , 易证 $BD_1 \perp$ 平面 FA_1C_1 , 所以三

棱锥

$F-A_1EC_1$ 的外接球球心 O_1 一定在直线 BD_1 上, 以 B 为坐标原点, 建立如图③所示的空间直角坐标系, 则 $E(0, 1, 0), D(2, 2, 0)$, 设 $O_1(x, x, x)$, 由 $O_1E = O_1D$ 得, $x^2 + (x-1)^2 + x^2 = (x-2)^2 + (x-2)^2 + x^2$, 解得 $x = \frac{7}{6}$, 所以 $R^2 = \left(\frac{7}{6}\right)^2 + \left(\frac{7}{6}-1\right)^2 + \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{11}{4}$, 所以三棱锥 $F-A_1EC_1$ 外接球的表面积为 $4\pi R^2 = 4\pi \times \frac{11}{4} = 11\pi$, 故 D 选项正确. 故选 ACD.



图③

12. $-\sqrt{6}$ 【热考点】向量共线的坐标运算

【深度解析】由题意可知 $a \parallel b$, 所以 $\sqrt{2}x = -2\sqrt{3}$, 解得 $x = -\sqrt{6}$.

13. -1 【热风向】利用函数的周期性求函数值

【深度解析】因为 $f(x+3) = -f(x)$, 所以 $f(x+6) = -f(x+3) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 的一个周期为 6. 因为 $f(1-2x) = f(1+2x)$, 设 $t=2x$, 则 $f(1-t) = f(1+t)$, 令 $t=1$, 则 $f(0) = f(2)$, 又 $f(1) = 2, f(2) = f(1) - f(0)$, 所以 $f(2) = f(0) = 1$, 所以 $f(3) = -f(0) = -1, f(4) = -f(1) = -2, f(5) = -f(2) = -1, f(6) = f(0) = 1$, 所以 $f(1) + f(2) + \dots + f(6) = 0$. 所以 $\sum_{k=1}^{17} f(k) = f(1) + f(2) + \dots + f(5) = -f(6) = -1$.

关键点拨 此题解题关键是 (1) 由 $f(x+3) = -f(x)$ 得到函数 $f(x)$ 的周期, 并赋值得到 $f(3) = -f(0), f(4) = -f(1), f(5) = -f(2), f(6) = f(0)$; (2) 由 $f(1-2x) = f(1+2x)$ 得到 $f(0) = f(2)$.

14. $\sqrt{\frac{5}{6}}$ 【热风向】数列与抛物线的交汇

【深度解析】 $\because B_1A_2 \parallel x$ 轴, $B_1(a_1, a_1^2)$, 且 $A_n \in l, \therefore A_2(a_1^2, a_1^2)$, 又 $A_2B_2 \perp x$ 轴, $\therefore B_2(a_1^2, a_1^4)$, 又 $B_n(a_n, a_n^2), \therefore a_2 = a_1^2$, 同理可得 $a_{n+1} = a_n^2$, 则 $\ln a_{n+1} = 2\ln a_n, \therefore \{\ln a_n\}$ 是以 $\ln a_1$ 为首项, 2 为公比的等比数列, $\ln a_n = \ln a_1 \cdot 2^{n-1}, \therefore a_n = a_1^{2^{n-1}}$. 由点 A_n 位于原点与 $A_0(1, 1)$ 之间可得, 点 B_n 在原点与 A_0 之间的抛物线上. $(a_3 - a_4)a_5 = (a_3 - a_3^2)a_3^4 = a_3^5 - a_3^6$, 令 $f(x) = x^5 - x^6, x \in (0, 1)$, 则 $f'(x) = 5x^4 - 6x^5 = x^4(5 - 6x)$,

当 $x \in (0, \frac{5}{6})$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $x \in (\frac{5}{6}, 1)$ 时, $f'(x) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{5}{6})$ 上单调递增, 在 $(\frac{5}{6}, 1)$ 上单调递减,

\therefore 当 $a_3 = \frac{5}{6}$ 时, $(a_3 - a_4)a_5$ 最大,

此时, $a_3 = a_1^4 = \frac{5}{6}$, 解得 $a_1 = \sqrt[4]{\frac{5}{6}}$.

一题多解 $B_n(a_n, a_n^2)$, 因为 $B_nA_{n+1} \parallel x$ 轴, 所以 $y_{A_{n+1}} = y_{B_n} = a_n^2$. 又 $B_nA_n \perp x$ 轴, 所以 $x_{A_n} = x_{B_n} = a_n$, 则 $x_{A_{n+1}} = a_{n+1}$, 则 $A_{n+1}(a_{n+1}, a_n^2)$, 因为 $A_n \in l$, 所以 $a_{n+1} = a_n^2$. 所以 $a_5 = a_2^4 = (a_1^2)^4 = a_1^8$, 所以 $(a_3 - a_4)a_5 = (a_3 - a_3^2)a_3^4 = a_3^5 - a_3^6$. 以下同深度解析.

解答题超详解及评分标准

15. (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\sqrt{2}$

【热题型】由面面平行的性质求参数、点到平面的距离的求解

【解】(1) 第一步: 由面面平行的性质得 $EF \parallel AD_1$

连接 EF . 由平面 $AA_1D_1D \parallel$ 平面 BB_1C_1C , 且平面 $AD_1EF \cap$ 平面 $AA_1D_1D = AD_1$, 平面 $AD_1EF \cap$ 平面 $BB_1C_1C = EF$, 所以 $EF \parallel AD_1$ 2 分

解法一 (平面向量的线性运算求值):

第二步: 证明 $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC_1}$

连接 AF, BE . 同理可得 $AF \parallel D_1E$, 所以四边形 AD_1EF 为平行四边形,

所以 $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC_1}$, 4 分

第三步: 利用向量的线性运算得到 $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1B}$

所以 $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{C_1E} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1B}$,

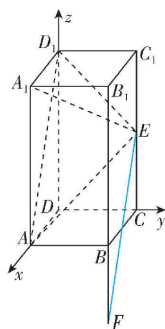
即 $\lambda = \frac{1}{2}$ 6 分

解法二 (建系法):

第一步: 建立空间直角坐标系, 写出 \overrightarrow{EF} 与 $\overrightarrow{AD_1}$ 的坐标

以 D 为原点建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$,

则 $A(1, 0, 0), D_1(0, 0, 2), E(0, 1, 1), B(1, 1, 0), B_1(1, 1, 2)$, 设 $F(1, 1, a)$,



► 第(1)问 6 分, 分成线线平行(2 分)结论(4 分)两个部分给分
► 利用面面平行的性质给 2 分, 不写不得分

► 首先证明四边形 AD_1EF 为平行四边形, 得 1 分, 不写不得分

► 利用向量的线性运算, 写出给 1 分, 直接写结果不得分

► 建立空间直角坐标系, 利用向量坐标法, 正确的建系并写出相应坐标得 2 分, 写出向量坐标再得 2 分

则 $\overrightarrow{EF}=(1,0,a-1)$, $\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,2)$, $\overrightarrow{B_1B}=(0,0,-2)$, 4分

第二步:由 $EF \parallel AD_1$, 求出 λ

由 $EF \parallel AD_1$, 得 $a-1=-2$, 即 $a=-1$, 则 $\overrightarrow{BF}=(0,0,-1)$, 又 $\overrightarrow{BF}=\lambda \overrightarrow{B_1B}$, 所以 $\lambda=\frac{1}{2}$ 6分

(2) 第一步:求平面 A_1D_1E 的法向量

由(1)中解法二的空间直角坐标系可得, $A_1(1,0,2)$, $F(1,1,-1)$, 所以 $\overrightarrow{A_1D_1}=(-1,0,0)$, $\overrightarrow{D_1E}=(0,1,-1)$, 8分

设 $\mathbf{n}=(x,y,z)$ 为平面 A_1D_1E 的法向量,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1D_1}=0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{D_1E}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x=0, \\ y-z=0, \end{cases}$ 9分

令 $y=1$, 得 $\mathbf{n}=(0,1,1)$ 为平面 A_1D_1E 的一个法向量. 10分

第二步:求点 F 到平面 A_1D_1E 的距离

又 $\overrightarrow{EF}=(1,0,-2)$, 所以点 F 到平面 A_1D_1E 的距离 $d=\frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EF}|}{|\mathbf{n}|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ 13分

一题多解 【解】(1) 第一步:证明四边形 AD_1EF 为平行四边形, 得到 $AD_1=EF$
连接 EF , AF . 由平面 $AA_1D_1D \parallel$ 平面 BB_1C_1C , 且平面 $AD_1EF \cap$ 平面 $AA_1D_1D=AD_1$,
平面 $AD_1EF \cap$ 平面 $BB_1C_1C=EF$, 所以 $EF \parallel AD_1$, 2分
同理可得 $AF \parallel D_1E$, 所以四边形 AD_1EF 为平行四边形,
所以 $AD_1=EF$ 4分

第二步:证明四边形 BC_1EF 为平行四边形, 得到 $BF=C_1E=\frac{1}{2}B_1B$

连接 BC_1 , 因为 $AD_1 \parallel BC_1$, 且 $AD_1=BC_1$,

所以 $EF \parallel BC_1$, 且 $EF=BC_1$,

所以四边形 BC_1EF 为平行四边形, 又 E 为 CC_1 的中点, 所以 $BF=C_1E=\frac{1}{2}C_1C=\frac{1}{2}B_1B$,

所以 $\lambda=\frac{1}{2}$ 6分

(2) 第一步:将求点 F 到平面 A_1D_1E 的距离转化为求点 A 到平面 A_1D_1E 的距离

由(1)知, $AF \parallel D_1E$, 又 $AF \not\subset$ 平面 A_1D_1E , $D_1E \subset$ 平面 A_1D_1E ,

所以 $AF \parallel$ 平面 A_1D_1E ,

所以点 F 到平面 A_1D_1E 的距离即为点 A 到平面 A_1D_1E 的距离. 8分

第二步:利用等体积法求距离

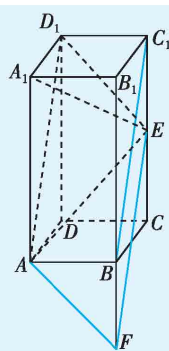
在 $\text{Rt} \triangle A_1D_1E$ 中, $A_1D_1=1$, $D_1E=\sqrt{D_1C_1^2+C_1E^2}=\sqrt{2}$, 所以 $S_{\triangle A_1D_1E}=\frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

在 $\text{Rt} \triangle A_1D_1A$ 中, $S_{\triangle A_1D_1A}=\frac{1}{2} \times 1 \times 2=1$, 10分

设点 A 到平面 A_1D_1E 的距离为 h , 由 $V_{A-A_1D_1E}=V_{E-A_1D_1A}$ 得 $\frac{1}{3}S_{\triangle A_1D_1E} \cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1D_1A} \cdot 1$,

所以 $h=\frac{S_{\triangle A_1D_1A}}{S_{\triangle A_1D_1E}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$, 12分

所以点 F 到平面 A_1D_1E 的距离为 $\sqrt{2}$ 13分



► 由线线平行得出方程, 给 1 分, 不写不得分

► 第(2)问 7 分, 分成法向量(4 分)距离(3 分)两个部分给分

► 利用垂直关系求得法向量,

写出方程组 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1D_1}=0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{D_1E}=0, \end{cases}$ 得 1 分, 不写不得分

► 结论正确, 给 1 分; 无此结论扣 1 分

► 第(1)问 6 分, 分成线线平行(2 分)结论(4 分)两个部分给分

► 利用面面平行的性质, 无此条件扣 1 分

► 写出此结论得 1 分, 无此结论扣 1 分

► 由平行四边形的定义判定平行四边形, 得 1 分, 无此结论扣 1 分

► 第(2)问 7 分, 分成距离转化(2 分)等体积法(4 分)结论(1 分)三个部分给分

► 由线面平行得出点面距, 得 1 分

► 求得一个面积得 1 分

► 利用等体积法得 1 分, 求得高, 得 1 分

► 结论得 1 分, 不写扣 1 分

16. (1) 6 6 (2) 见解析, $E(X)=\frac{3}{5}$

【热题型】频率分布直方图, 正态分布, 超几何分布

【解】(1) 第一步: 计算对产品功能非常满意的概率及人数

因为对产品功能满意程度的评分服从正态分布 $N(80, 25)$, 其中 $\mu=80$, $\sigma=5$, 设对产品功能满意程度的评分为 Y ,

所以 $P(Y>90)=\frac{1}{2}[1-P(80-10<Y\leq 80+10)]=0.0228$,

► 第(1)问共 5 分, 分成对产品功能非常满意(3 分)对产品外观非常满意(2 分)两个部分给分
► 概率列式结果正确给 2 分

所以本次调查对产品功能非常满意的顾客约有 $250 \times 0.0228 \approx 6$ (人). 3分

第二步: 计算对产品外观非常满意的顾客人数

根据频率分布直方图得, 对产品外观非常满意的频率为 $0.0024 \times 10 = 0.024$, 则本次调查对产品外观非常满意的顾客约有 $250 \times 0.024 = 6$ (人). 5分

(2) **第一步:** 列出 X 的可能取值

依题意, 这 250 人中对两项都非常满意的有 2 人, 则只对产品功能非常满意的有 4 人, 只对对产品外观非常满意的有 4 人, X 的可能取值为 0, 1, 2, 7分

第二步: 计算不同 X 取值对应的概率

$$P(X=0) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}, P(X=1) = \frac{C_8^2 C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}, P(X=2) = \frac{C_8^1 C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{15},$$

第三步: 列出分布列

则 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

..... 12分

第四步: 计算期望

$$\text{数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{7}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{3}{5}. \quad \text{..... 15分}$$

17. (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ (2) $\frac{\sqrt{6}-2}{3}$

【热题型】求椭圆方程、椭圆中三角形面积的最值问题、直线和椭圆的位置关系

【解】(1) 由题可得, 将 $A(0, 1), M(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ 两点的坐标代入椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

$$\text{可得} \begin{cases} b^2 = 1, \\ \frac{16}{9a^2} + \frac{1}{9b^2} = 1, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} b^2 = 1, \\ a^2 = 2, \end{cases} \quad \text{..... 4分}$$

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 5分

(2) **第一步:** 设 $P(x_0, y_0)$, 求 $\triangle APM$ 面积的最大值即求 $x_0 + 2y_0$ 的最大值

设 $P(x_0, y_0)$, 因为点 P 在弧 AM 上, 所以 $0 \leq x_0 \leq \frac{4}{3}, \frac{1}{3} \leq y_0 \leq 1$, 且 $x_0^2 + 2y_0^2 = 2$ ①.

$$\text{由 } A(0, 1), M(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}), \text{ 可得 } |AM| = \sqrt{(\frac{4}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2} = \frac{2\sqrt{5}}{3}. \quad \text{..... 7分}$$

$$\text{易得直线 } AM: x + 2y - 2 = 0, \text{ 点 } P \text{ 到直线 } AM \text{ 的距离为 } d = \frac{|x_0 + 2y_0 - 2|}{\sqrt{5}} = \frac{x_0 + 2y_0 - 2}{\sqrt{5}},$$

则问题转化为求 $x_0 + 2y_0$ 的最大值. 9分

解法一: **第二步:** 设 $x_0 + 2y_0 = t$, 代入 $x_0^2 + 2y_0^2 = 2$, 利用 $\Delta \geq 0$ 求得 $x_0 + 2y_0$ 的最大值

设 $x_0 + 2y_0 = t$, 代入 $x_0^2 + 2y_0^2 = 2$ 得 $3x_0^2 - 2tx_0 + t^2 - 4 = 0$, 12分

因为 $\Delta = 4t^2 - 12(t^2 - 4) \geq 0$, 得 $-\sqrt{6} \leq t \leq \sqrt{6}$.

当 $x_0 + 2y_0 = \sqrt{6}$, 且 $x_0^2 + 2y_0^2 = 2$ 时, 得 $3y_0^2 - 2\sqrt{6}y_0 + 2 = 0$, 即 $(\sqrt{3}y_0 - \sqrt{2})^2 = 0$, 所以 $y_0 = \frac{\sqrt{6}}{3} \in$

$[\frac{1}{3}, 1]$, 所以 $(x_0 + 2y_0)_{\max} = \sqrt{6}$ 14分

$$\text{故 } \triangle APM \text{ 面积的最大值为 } S = \frac{1}{2} |AM| \cdot \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}-2}{3}. \quad \text{..... 15分}$$

解法二: **第二步:** 利用不等式求 $x_0 + 2y_0$ 的最大值

因为 $(x_0 + 2y_0)^2 = x_0^2 + 4y_0^2 + 4x_0y_0 \leq x_0^2 + 4y_0^2 + 2x_0^2 + 2y_0^2 = 3(x_0^2 + 2y_0^2) = 6$ 12分

所以 $x_0 + 2y_0 \leq \sqrt{6}$, 当且仅当 $\begin{cases} x_0 = y_0, \\ x_0 + 2y_0 = \sqrt{6} \end{cases}$ 时, 等号成立 (提示: 不等式 $4x_0y_0 \leq 2x_0^2 + 2y_0^2$ 当且仅当

人数正确给 1 分

概率列式正确给 1 分, 结果正确给 1 分

第(2)问 10 分, 分成 X 取值(2 分) 概率及分布列(5 分) 期望(3 分) 三个部分给分

分布列正确给 5 分, 概率正确 1 个给 1 分

期望列式正确给 1 分, 结果正确给 2 分

第(1)问 5 分

由已知条件, 列出方程组, 得 3 分, 解对得 1 分

第(2)问 10 分, 分成条件转化(4 分) 最值(5 分) 面积(1 分) 三个部分给分

确定点 P 横、纵坐标的范围, 得 1 分, 求得 $|AM|$ 得 1 分

根据一元二次方程有实数根的条件, 写出 t 的范围, 不写扣 1 分

基本不等式的利用

基本不等式中等号成立的条件 $x_0 = y_0$, 给 1 分

$x_0=y_0$ 时等号成立), 解得 $y_0=\frac{\sqrt{6}}{3}\in\left[\frac{1}{3},1\right]$,

则 $(x_0+2y_0)_{\max}=\sqrt{6}$ 14 分

故 $\triangle APM$ 面积的最大值为 $S=\frac{1}{2}|AM|\cdot\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{6}-2}{3}$ 15 分

一题多解 (2) 第一步: 设与 AM 平行的直线方程为 $x+2y+m=0$, 与椭圆方程联立, 利用 $\Delta=0$ 求出 m

由 $A(0,1), M\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$, 得 $|AM|=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$ 7 分

易得直线 $AM: x+2y-2=0$,

设与 AM 平行的直线方程为 $x+2y+m=0$, 8 分

$$\text{由} \begin{cases} x+2y+m=0, \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1, \end{cases} \text{得 } 6y^2+4my+m^2-2=0,$$

当直线与椭圆相切时, $\Delta=(4m)^2-24(m^2-2)=-8m^2+48=0$, 解得 $m=\pm\sqrt{6}$,

因为点 P 在弧 AM 上, 所以 $m=-\sqrt{6}$ 11 分

第二步: 求出两条平行直线间的距离, 得到 $\triangle APM$ 面积的最大值

此时直线 $x+2y-\sqrt{6}=0$ 与直线 AM 的距离 $d=\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{5}}$, 14 分

所以 $\triangle APM$ 面积的最大值为 $S=\frac{1}{2}|AM|\cdot\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{6}-2}{3}$ 15 分

18. (1) 见解析 (2) 2

【热题型】 利用导数研究函数的单调性和极值点的个数

思路导引

$$\begin{aligned} (1) \text{ 求 } f'(x) &\rightarrow x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \sin 2x > 0 \rightarrow f'(x) = \frac{e^x - x}{xe^x} > \frac{e^x - x + 1}{xe^x} > 0 \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ 的单调性;} \\ (2) h(x) = f'(x) &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \xrightarrow{\cos 2x < 0} h'(x) < \frac{x^2 - e^x}{x^2 e^x} \rightarrow \text{证明 } \varphi(x) = x^2 - e^x < 0 \\ \text{在 } (0, +\infty) \text{ 上恒成立} \rightarrow h'(x) < 0 \rightarrow h(x) \text{ 单调递减} \rightarrow \begin{cases} h\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0 \\ h\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0 \end{cases} \\ \exists x_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right), \text{ 使 } h(x_1) = 0 \rightarrow f(x) \text{ 在 } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \text{ 内有 1 个极值点} \\ x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right) \rightarrow \text{设 } F(x) = h'(x) \xrightarrow{\sin 2x < 0} F'(x) = \frac{2e^x - x^3}{x^3 e^x} \rightarrow \\ \text{证明 } m(x) = 2e^x - x^3 > 0 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上恒成立} \rightarrow F'(x) > 0 \rightarrow h'(x) \text{ 单调递增} \\ \begin{cases} h'\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0 \\ h'(\pi) > 0 \end{cases} \rightarrow h(x) \text{ 的单调性} \rightarrow \begin{cases} h\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0 \\ h(\pi) > 0 \end{cases} \rightarrow \exists x_2 \in (x_0, \pi) \text{ 使} \\ h(x_2) = 0 \rightarrow f(x) \text{ 在 } \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right) \text{ 内有 1 个极值点} \end{array} \right. \end{aligned}$$

【解】 (1) 第一步: 求 $f'(x)$, 利用 $\sin 2x > 0$, 得到 $f'(x) = \frac{e^x - x}{xe^x}$

由已知可得, $f'(x) = -e^{-x} + \frac{1}{x} + 2\sin 2x$,

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\sin 2x > 0$, $\therefore f'(x) > \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x} = \frac{e^x - x}{xe^x}$ 2 分

第二步: 证明 $e^x > x+1$, 从而得到 $f'(x) > 0$

令 $g(x) = e^x - (x+1)$, $g'(x) = e^x - 1 > 0$,

\therefore 当 $x \in (0, \pi)$ 时, $g(x)$ 单调递增, 此时 $g(x) > g(0) = 0$, 4 分

当 $x \in (0, \pi)$ 时, $e^x > x+1$, 即 $f'(x) > \frac{e^x - x}{xe^x} > \frac{x+1-x}{xe^x} = \frac{1}{xe^x} > 0$, $\therefore f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增. ... 6 分

▶ 写出 x_0+2y_0 的最大值得 1 分

▶ 写出结论得 1 分

▶ 第(2)问 10 分, 分成截距(6 分)距离(3 分)面积(1 分)三个部分给分

▶ 联立方程, 消元为关于 y 的一元二次方程, 得 1 分, 再利用相切只有一个公共点, 得 1 分

▶ 写出条件和求得 m 得 1 分

▶ 求得两平行直线间的距离得 2 分

▶ 写出结论得 1 分

▶ 第(1)问 6 分, 分成求导(2 分)判断单调性(4 分)两部分给分

▶ 求得 $f'(x)$, 并说明 $\sin 2x > 0$, 无此说明扣 1 分

▶ 构造函数, 利用导数探究函数的单调性, 得 1 分, 无此说明扣 1 分

▶ 无此说明扣 1 分

(2) 令 $h(x) = f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x} + 2\sin 2x$,

第一步: 当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 时, 由 $\cos 2x < 0$ 得 $h'(x) < \frac{x^2 - e^x}{x^2 e^x}$

当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 时, $2x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\cos 2x < 0$,

所以 $h'(x) = \frac{1}{e^x} - \frac{1}{x^2} + 4\cos 2x < \frac{1}{e^x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - e^x}{x^2 e^x}$ 8分

第二步: 证明 $\varphi(x) = x^2 - e^x < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立

令 $\varphi(x) = x^2 - e^x$, $\varphi'(x) = 2x - e^x$, 令 $n(x) = \varphi'(x)$, 则 $n'(x) = 2 - e^x$, 令 $n'(x) = 0$, 得 $x = \ln 2$,
当 $x \in (0, \ln 2)$ 时, $n'(x) > 0$, $n(x)$ 单调递增, 当 $x \in (\ln 2, +\infty)$ 时, $n'(x) < 0$, $n(x)$ 单调递减,
所以当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) \leq \varphi'(\ln 2) = 2\ln 2 - e^{\ln 2} = 2(\ln 2 - 1) < 0$,
所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 此时 $\varphi(x) < \varphi(0) = -1 < 0$ 10分

第三步: 讨论 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 内有 1 个极值点

所以当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减, $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} > 0$,

$$h\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{4}{3\pi} - \frac{1}{e^{\frac{3\pi}{4}}} - 2 < 0.$$

所以 $\exists x_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, 使 $h(x_1) = 0$, 即 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 内有 1 个极值点. 12分

第四步: 令 $F(x) = h'(x)$, 当 $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ 时, 由 $\sin 2x < 0$, 得到 $F'(x) > \frac{2e^x - x^3}{x^3 e^x}$

令 $F(x) = h'(x) = \frac{1}{e^x} - \frac{1}{x^2} + 4\cos 2x$,

当 $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ 时, $2x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, 则 $\sin 2x < 0$,

所以 $F'(x) = -\frac{1}{e^x} + \frac{2}{x^3} - 8\sin 2x > -\frac{1}{e^x} + \frac{2}{x^3} = \frac{2e^x - x^3}{x^3 e^x}$ 14分

第五步: 证明 $m(x) = 2e^x - x^3 > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立

令 $m(x) = 2e^x - x^3$, 则 $m'(x) = 2e^x - 3x^2$,

由(1)中的 $g(x) > 0$ 得 $e^{x-1} \geq x$, 所以 $e^x \geq ex$, $e^{\frac{x}{2}} \geq \frac{ex}{2}$,

所以 $e^x = (e^{\frac{x}{2}})^2 \geq \frac{e^2}{4} x^2$, 当且仅当 $x = 2$ 时等号成立, 所以当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $m'(x) \geq$

$$\left(\frac{e^2}{2} - 3\right)x^2 > 0,$$

所以 $m(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 此时 $m(x) > m(0) = 2 > 0$ 15分

第六步: 讨论 $f(x)$ 在 $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ 内有 1 个极值点

所以当 $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ 时, $F'(x) > 0$, $h'(x)$ 单调递增.

又 $h'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = e^{-\frac{3\pi}{4}} - \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{-2} < 0$, $h'(\pi) = e^{-\pi} - \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + 4 > 0$.

所以 $\exists x_0 \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ 使 $h'(x_0) = 0$, 所以 $h(x)$ 在 $\left(\frac{3\pi}{4}, x_0\right)$ 上单调递减, 在 (x_0, π) 上单调递增.

又 $h\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{4}{3\pi} - e^{-\frac{3\pi}{4}} - 2 < 0$, 所以 $h(x_0) < 0$. 又 $h(\pi) = \frac{1}{\pi} - e^{-\pi} = \frac{e^{\pi} - \pi}{\pi e^{\pi}} > 0$,

所以 $\exists x_2 \in (x_0, \pi)$ 使 $h(x_2) = 0$, 即 $f(x)$ 在 $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ 内有 1 个极值点. 16分

► 第(2)问 11分, 分成 2+2+4+3 给分

► 确定 $\cos 2x < 0$, 进行放缩, 得 1分, 无此说明扣 1分

► 构造函数, 利用导数研究函数单调性, 写出得 1分, 无此说明扣 1分

► 确定函数值的符号, 利用零点存在定理判断, 得 1分

► 构造函数, 利用导数研究函数单调性, 写出此步得 1分, 无此说明扣 1分

► 利用导数探究函数的单调性, 无此说明扣 1分

► 无此说明扣 1分

第七步:得出结论

综上, $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内的极值点的个数为 2. 17 分

关键点拨

第二问的解题关键:(1)分 $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ 和 $x \in (\frac{3\pi}{4}, \pi)$ 两种情况分别讨论;
(2)利用 $\sin 2x$ 与 $\cos 2x$ 的正负进行放缩;(3)证明 $\varphi(x) = x^2 - e^x < 0, m(x) = 2e^x - x^3 > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

19. (1) $\begin{cases} x=1, \\ y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1, \\ y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2, \\ y=4 \end{cases}$ (2) 65 (3) $\frac{n_0^2 - 2n_0 + 8}{8}$

【热风向】由递推数列研究数列的有关性质、求等差数列前 n 项和、数列新定义问题

【解】(1) 第一步:利用“ U -数列”的定义得到关于 x, y 的不等式组

依题意,因为数列 $1, x, y, 7$ 为“ U -数列”,

所以 $\begin{cases} 1+y > 2x, \\ x+7 > 2y, \end{cases}$ 其中 $x, y \in \mathbb{N}^*$, 2 分

第二步:列出所有满足条件的 x, y 的值

故所有可能的 x, y 为 $\begin{cases} x=1, \\ y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1, \\ y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2, \\ y=4 \end{cases}$ 4 分

(2) 第一步:利用“ U -数列”的定义得到 $b_k \geq b_{k-1} + 1$

一方面,注意到: $a_{k+1} + a_{k-1} > 2a_k \Leftrightarrow a_{k+1} - a_k > a_k - a_{k-1}$,

对任意的 $1 \leq i \leq n-1$, 令 $b_i = a_{i+1} - a_i$,

则 $b_i \in \mathbb{Z}$ 且 $b_k > b_{k-1} (2 \leq k \leq n-1)$, 因为 $a_i \in \mathbb{N}^*$, $a_{k+1} - a_k > a_k - a_{k-1}$, 所以 $a_{k+1} - a_k$ 比 $a_k - a_{k-1}$ 至少大 1, 故 $b_k \geq b_{k-1} + 1$ 对任意的 $2 \leq k \leq n-1$ 恒成立(★), 6 分

第二步:利用 $b_k \geq b_{k-1} + 1$ 得到 $b_i \geq i-1 (2 \leq i \leq n-1)$, 从而得到 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) \leq 2\,017-1$, 解得 $n \leq 65$

当 $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = 2\,017$ 时, 注意到 $b_1 = a_2 - a_1 = 1-1=0$,

得 $b_i = (b_i - b_{i-1}) + (b_{i-1} - b_{i-2}) + \cdots + (b_2 - b_1) + b_1 \geq i-1 (2 \leq i \leq n-1)$,

此时 $a_n - a_1 = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} \geq 0+1+2+\cdots+n-2 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ (提示:叠加法的应用, $a_n - a_1 =$

$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}$),

即 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) \leq 2\,017-1$, 解得 $-62 \leq n \leq 65$, 故 $n \leq 65$ 8 分

第三步:取 $b_i = i-1 (1 \leq i \leq 64)$, 推得 $n=65$ 符合题意

另一方面,取 $b_i = i-1 (1 \leq i \leq 64)$,

则对任意的 $2 \leq k \leq 64, b_k > b_{k-1}$, 故数列 $\{a_n\}$ 为“ U -数列”,

此时 $a_{65} = 1+0+1+2+\cdots+63 = 1 + \frac{(1+63) \times 63}{2} = 2\,017$, 即 $n=65$ 符合题意. 10 分

综上, n 的最大值为 65. 11 分

(3) 第一步:利用“ U -数列”的定义, 结合(2)中结论得到 $M \geq \frac{n_0^2 - 2n_0 + 8}{8}$

当 $n_0 = 2m (m \geq 2, m \in \mathbb{N}^*)$ 时, 一方面:由(★)式, 得 $b_{k+1} - b_k \geq 1$,

则 $b_{m+k} - b_k = (b_{m+k} - b_{m+k-1}) + (b_{m+k-1} - b_{m+k-2}) + \cdots + (b_{k+1} - b_k) \geq m$, 12 分

此时有 $(a_1 + a_{2m}) - (a_m + a_{m+1}) = (a_{2m} - a_m) - (a_{m+1} - a_1)$

$= (b_{m+1} + b_{m+2} + \cdots + b_{2m-1}) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_{m-1})$

$= (b_{m+1} - b_1) + (b_{m+2} - b_2) + \cdots + (b_{2m-1} - b_{m-1}) \geq m(m-1)$ (提示:由(2)知, $a_{2m} - a_1 = b_1 + b_2 + \cdots +$

b_{2m-1} , $a_m - a_1 = b_1 + b_2 + \cdots + b_{m-1}$, 两式作差得, $a_{2m} - a_m = b_m + b_{m+1} + \cdots + b_{2m-1}$, 又可得 $a_{m+1} - a_1 = b_1 + b_2 + \cdots + b_m$, 所以 $(a_{2m} - a_m) - (a_{m+1} - a_1) = (b_{m+1} + b_{m+2} + \cdots + b_{2m-1}) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_{m-1})$, 13 分

► 得到关于 x, y 的不等式组, 得 2 分

► 列出 x, y 的所有取值, 得 2 分

► 令 $b_i = a_{i+1} - a_i$, 得 1 分

► 得到 $b_k \geq b_{k-1} + 1$, 得 1 分

► 得到 $a_n - a_1 = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} \geq 0+1+2+\cdots+n-2 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, 得 1 分

► 解出 $n \leq 65$, 得 1 分

► 取 $b_i = i-1 (1 \leq i \leq 64)$, 得到数列 $\{a_n\}$ 为“ U -数列”, 得 1 分

► 得到 $n=65$ 符合题意, 得 1 分

► 最后总结得 1 分

► 得到 $b_{m+k} - b_k = (b_{m+k} - b_{m+k-1}) + (b_{m+k-1} - b_{m+k-2}) + \cdots + (b_{k+1} - b_k) \geq m$, 得 1 分

► 得到 $(a_1 + a_{2m}) - (a_m + a_{m+1}) = (a_{2m} - a_m) - (a_{m+1} - a_1) = (b_{m+1} - b_1) + (b_{m+2} - b_2) + \cdots + (b_{2m-1} - b_{m-1}) \geq m(m-1)$, 得 1 分

故 $M \geq \frac{a_1 + a_{2m}}{2} \geq \frac{a_m + a_{m+1} + m(m-1)}{2} \geq \frac{m^2 - m + 2}{2} = \frac{\left(\frac{n_0}{2}\right)^2 - \frac{n_0}{2} + 2}{2} = \frac{n_0^2 - 2n_0 + 8}{8}$ (提示: $M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{2m}\}$, 则 $M \geq a_k, k \in [1, 2m]$); 14 分

第二步:取特殊例子证得 $M = \frac{n_0^2 - 2n_0 + 8}{8}$ 成立

另一方面,当 $b_1 = 1 - m, b_2 = 2 - m, \dots, b_{m-1} = -1, b_m = 0, b_{m+1} = 1, \dots, b_{2m-1} = m - 1$ 时,

$a_{k+1} + a_{k-1} - 2a_k = (a_{k+1} - a_k) - (a_k - a_{k-1}) = b_k - b_{k-1} = 1 > 0$,

取 $a_m = 1$, 则 $a_{m+1} = 1, a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_m, a_{m+1} < a_{m+2} < \dots < a_{2m}$,

且 $a_1 = a_m - (b_1 + b_2 + \dots + b_{m-1}) = \frac{1}{2}m(m-1) + 1$,

$a_{2m} = a_{m+1} + (b_{m+1} + b_{m+2} + \dots + b_{2m-1}) = \frac{1}{2}m(m-1) + 1$,

此时 $M = a_1 = a_{2m} = \frac{1}{2}m(m-1) + 1 = \frac{1}{2} \times \frac{n_0}{2} \times \left(\frac{n_0}{2} - 1\right) + 1 = \frac{n_0^2 - 2n_0 + 8}{8}$ 16 分

综上, M 的最小值为 $\frac{n_0^2 - 2n_0 + 8}{8}$ 17 分

► 得到 $M \geq \frac{n_0^2 - 2n_0 + 8}{8}$, 得 1 分

► 取 $a_m = 1$, 得 1 分

► 证得 $M = \frac{n_0^2 - 2n_0 + 8}{8}$ 成立, 得 1 分

► 最后结论得 1 分

2025 年全国高考名校名师联席命制 数学信息卷(八)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
答案	A	B	A	C	B	C	B	D	BD	ABD	ABC	$y=1$	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$[2-\sqrt{3}, +\infty)$

信息卷(八)

1. A 【热考点】复数的除法运算

【深度解析】因为 $2 - zi = 1 + i$, 所以 $z = \frac{-1+i}{-i} = \frac{(-1+i)i}{-i^2} = -1 - i$.

故选 A.

2. B 【热考点】根据集合间的关系求参数取值范围

【深度解析】 $A = \{x \in \mathbb{Z} | x + 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{Z} | x > -1\}, B = \{x | x \leq a\}$, 因为 $A \cap B$ 中有 2 个元素(易错:集合中的元素取整数), 则 $A \cap B = \{0, 1\}$, 所以 $1 \leq a < 2$. 故选 B.

3. A 【热题型】函数奇偶性的应用、由奇偶性求参数

【深度解析】设 $F(x) = f(x) - 1$, 因为 $F(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, 所以 $F(x) + F(-x) = 0$, 即 $f(x) - 1 + f(-x) - 1 = 0$, 即 $f(x) + f(-x) = 2$, 所以 $f(1) + f(-1) = 2$. 因为 $F(0) = f(0) - 1 = 0$, 所以 $f(0) = 1$, 所以 $f(-1) + f(0) + f(1) = 2 + 1 = 3$. 故选 A.

4. C 【热考点】向量数量积、模的坐标运算

【深度解析】由向量 $a = (2, x), b = (3, 1)$, 得 $2a - b = (1, 2x - 1)$. 因为 $(2a - b) \perp b$, 所以 $(2a - b) \cdot b = 3 + 2x - 1 = 2x + 2 = 0$, 解得 $x = -1$, 所以 $a + b = (5, 0)$, 所以 $|a + b| = 5$. 故选 C.

5. B 【热题型】排列组合、古典概型

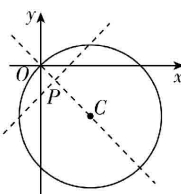
【深度解析】不妨假设六个小孩已经站好了位置, 则爸爸不同的站位方法数为 A_6^6 . 爸爸找到各自的小孩, 其为定序问题, 则不同站位方法数为 $C_6^3 C_3^3$, 所以不需要插队的概率 $P = \frac{C_6^3 C_3^3}{A_6^6} =$

$\frac{1}{36}$. 故选 B.

6. C 【热考点】直线与圆的位置关系、弦长的求解

【深度解析】由题可得, 圆 $C: x^2 + y^2 - 6x + 6y = 0$, 圆心 $C(3, -3)$, 半径 $r = 3\sqrt{2}$.

因为直线 $l: (m-1)x + 2y + 3 - m = 0$, 即 $m(x-1) + 2y - x + 3 = 0$, 令 m 的系数为 0, 即 $x = 1$, 解得 $y = -1$, 即直线 l 恒过定点 $P(1, -1)$. 因为 $1^2 + (-1)^2 - 6 - 6 < 0$, 所以定点 P 在圆 C 内部(关键:确定定点在圆内部).



设圆心 C 到直线 l 的距离为 d , 则弦长 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$.

当 $d = 0$ 时, 弦长 $|AB|$ 最大, 即过点 P 的最长弦长为圆 C 的直径 $2r = 6\sqrt{2}$; 当 d 最大时, $d_{\max} = |PC| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$ (提示: 当 d 最大时, d 为圆心 C 与弦 AB 的中点 P 连线的长度), 此时弦长 $|AB|$ 最小, 最小值为 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d_{\max}^2} = 2\sqrt{18 - 8} = 2\sqrt{10}$. 综上, 线段 AB 的长度的取值范围为 $[2\sqrt{10}, 6\sqrt{2}]$. 故选 C.

7. B 【热考点】双曲线渐近线的求解

【深度解析】不妨设 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0), M(x_0, y_0)$, 且 $x_0 \geq 2$ (提示: 注意 M 是双曲线 C 右支上的一个动点, 则横坐标大于等于 2), 则 $|MF_1|^2 - |MF_2|^2 = (x_0 + c)^2 + y_0^2 - [(x_0 - c)^2 + y_0^2] = 4cx_0 \geq 8c$, 所以 $8c = 8\sqrt{6}$, 解得 $c = \sqrt{6}, b = \sqrt{2}$, 故双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$. 故选 B.

一题多解 因为 $|MF_1|^2 - |MF_2|^2 = (|MF_1| - |MF_2|) \cdot (|MF_1| + |MF_2|) = 4(|MF_1| + |MF_2|) = 4(4 + 2|MF_2|) \geq 4[4 + 2(c-2)] = 8c$, 所以 $8c = 8\sqrt{6}$, 解得 $c = \sqrt{6}$, 则 $b = \sqrt{2}$, 故双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$. 故选 B.